Aula 6

Funções Complexas

Exponencial Complexa

Definição: Define-se a **exponencial complexa**, $\mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como a função que, para cada $z = x + iy \in \mathbb{C}$, é dada por

$$\mathrm{Exp}(z) = e^x(\cos y + i \,\mathrm{sen}\, y).$$

Fórmula de Euler

$$\boxed{\mathrm{Exp}(i\theta) = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Proposição: A função $\mathrm{Exp} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfaz as seguintes propriedades

- $\mathrm{Exp}(z+w) = \mathrm{Exp}(z)\mathrm{Exp}(w)$, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$.
- $(\mathrm{Exp}(z))^{-1} = \frac{1}{\mathrm{Exp}(z)} = \mathrm{Exp}(-z)$.
- $(\mathrm{Exp}(z))^{k} = \mathrm{Exp}(kz), \qquad k \in \mathbb{Z}$.
- $\overline{\mathrm{Exp}(z)} = \mathrm{Exp}(\bar{z})$.
- Para todo $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Exp}(z) \neq 0$.
- $|\mathrm{Exp}(z)| = e^{x}, \qquad \mathrm{Arg}(\mathrm{Exp}(z)) = y + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.
- $\mathrm{Exp}(z) = 1 \Leftrightarrow z = 2\pi k\, i, \quad k \in \mathbb{Z}$.
- Exp é uma função periódica,

$$\mathrm{Exp}(z + 2\pi k\, i) = \mathrm{Exp}(z), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funções Trigonométricas

Definição: Definem-se as funções trigonométricas coseno e seno complexas, para cada $z \in \mathbb{C}$, como

$$\cos z = \frac{\mathrm{Exp}(iz) + \mathrm{Exp}(-iz)}{2} \qquad \mathrm{sen}\, z = \frac{\mathrm{Exp}(iz) - \mathrm{Exp}(-iz)}{2i}$$

Proposição: Para todos $z, w \in \mathbb{C}$ tem-se

- $\mathrm{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$
- $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \mathrm{sen}\, z\, \mathrm{sen}\, w$
- $\mathrm{sen}(z+w) = \mathrm{sen}\, z \cos w + \mathrm{sen}\, w \cos z$
- $\mathrm{sen}(z+T) = \mathrm{sen}\, z \Leftrightarrow T = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $\cos(z+T) = \cos z \Leftrightarrow T = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$